Roll No. .... Total Printed Pages - 7

F-3349

B. A. (Part - III) Examination, 2022

(Old/New Course)

MATHEMATICS

PAPER FIRST

(Analysis)

Time : Three Hours] *[Maximum Marks:50*

नोट : प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Attempt any two parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई - 1 / Unit - 1

1. (a) माना कि $\sum C_n$ अभिसरण करती है तथा

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n. \qquad (-1<x<1)$$

तब दर्शाइए कि

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Suppose the series $\sum C_n$ converges and

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n. \qquad (-1<x<1)$$

then show that

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Cn.$$

(b) फलन

$$f(x, y)=x^2 y^2 + \sin x + \cos y$$

के लिए यंग प्रमेय का सत्यापन मूल बिन्दु पर कीजिए।

Verify the Young's theorem at origin for the function

$$f(x, y) = x^2\ y^2 + \sin x + \cos y$$

(c) फलन *f (x)* के लिए अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में फूरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & , \quad 0 \le x \le \pi \\ -\cos x & , \quad -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

Find the Fourier series of the function *f (x)* in the interval $(-\pi, \pi)$ where

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & , \quad 0 \le x \le \pi \\ -\cos x & , \quad -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

इकाई - 2 / Unit - 2

2. (a) मान लो $f : [a, b] \to R,\ [a, b]$ पर एक परिबद्ध फलन है। तब सिद्ध कीजिए कि f, R - समाकलनीय है यदि और केवल यदि प्रत्येक $\in > 0$ के लिए, $[a, b]$ के एक विभाजन P का अस्तित्व इस प्रकार है कि

$$\bigcup(P, f) - L(P, f) < \in$$

Let $f : [a, b] \to R$, be a bounded function on [a, b] , then prove that $f \in R[a, b]$ if and only if for every $\in > 0$, there exists a partition p of [a, b] such that,

$$\bigcup(P, f) - L(P, f) < \in$$

(b) बीटा फलन

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$$

के अभिसरण के लिए व्याख्या कीजिए।

Discuss the convergence of Beta Function

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$$

(c) दर्शाइए कि

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x}\, dx = \log(1+\alpha)$$

$$(\alpha > -1)$$

Show that,

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x}\, dx = \log(1+\alpha)$$

$$(\alpha > -1)$$

इकाई - 3 / Unit - 3

3. (a) दर्शाइये कि फलन

$$u = \sin x.\cos hy + 2\cos x.\sin hy + x^2 - y^2 + 4xy$$

एक हार्मोनिक फलन है तथा संगत विश्लेषिक फलन *f (z)* = u + *iv* का निर्धारण कीजिए।

Show that the function

$$u = \sin x.\cos hy + 2\cos x.\sin hy + x^2 - y^2 + 4xy$$

is a Harmonic function and determine the corresponding analytic function *f (z)* = u + *iv.*

(b) दर्शाइये कि द्विरेखीय रूपान्तरण के अन्तगर्त वज्रानुपात निश्चर होते हैं।

Show that cross-ratios are invariant under a Bilinear Transformation.

(c) किसी फलन $f(z)$ विश्लेषिक होने के लिए कॉशी-

रीमान समीकरण को व्युत्पन्न कीजिए।

Derive Cauchy-Riemann equation for a function $f(z)$ to be analytic.

इकाई - 4 / Unit - 4

4. (a) सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समष्टि में परिमित संख्या में विवृत्त समुच्चयों का सर्वनिष्ठ विवृत्त होता है।

Prove that in a metric space, the intersection of a finite number of open sets is open.

(b) सिद्ध कीजिए कि ऐसा कोई पूर्णांक r विद्यमान नहीं है जिसके लिए $\sqrt{r+1}+\sqrt{r-1}$ एक परिमेय संख्या हो।

Prove that there exists no integer for which $\sqrt{r+1}+\sqrt{r-1}$ is a rational number.

(c) सिद्ध कीजिए कि परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q पूर्ण क्रमित क्षेत्र नहीं होता है।

Prove that the set of rational numbers Q is not order complete field.

इकाई - 5 / Unit - 5

5. (a) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक दूरीक समष्टि प्रथम गणनीय होता है।

Prove that every metric space is first countable.

(b) मान लो (x, d) तथा (y,९) दो दूरीक समष्टियाँ और $f : x \to y$ एक फलन है। तब सिद्ध कीजिए कि f संतत है यदि और केवल यदि $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, x के प्रत्येक उपसमुच्चय A के लिए।

Let (x, d) and (y,९) be two metric spaces and $f : x \to y$ be a function. Then prove that f is continuous iff $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, for every subset A of x.

(c) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक सम्पूर्णतया परिबद्ध दूरीक समष्टि परिबद्ध होता है।

Prove that every totally bounded metric space is bounded.